Análisis Complejo: 1.1 Series de Mittag-Lefler

Presentaciones de clase

Universidad de Murcia

Curso 2011-2012

1 Desarrollos Mittag-Lefler

Objetivos

Objetivos

Objetivos

Objetivos

- Utilizar el método de los residuos para sumar series de números complejos.

Objetivos

Objetivos

- Utilizar el método de los residuos para sumar series de números complejos.
- Demostrar el teorema de descomposición en fracciones simples para funciones meromorfas.

Objetivos

Objetivos

- Utilizar el método de los residuos para sumar series de números complejos.
- Demostrar el teorema de descomposición en fracciones simples para funciones meromorfas.
- Encontrar la descomposición de funciones clásicas.

Sumación se series por el método de los residuos

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ se dice que es meromorfa en Ω si existe $A \subset \Omega$ tal que:

1. $A' \cap \Omega = \emptyset$.
2. $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus A)$.
3. f tiene un polo en cada $a \in A$.

Observaciones:

- En la definición anterior admitimos $A = \emptyset$, en cuyo caso, las funciones holomorfas son meromorfas.

Sumación se series por el método de los residuos

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ se dice que es meromorfa en Ω si existe $A \subset \Omega$ tal que:

1. $A' \cap \Omega = \emptyset$.
2. $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus A)$.
3. f tiene un polo en cada $a \in A$.

Observaciones:

- En la definición anterior admitimos $A = \emptyset$, en cuyo caso, las funciones holomorfas son meromorfas.
- $\mathscr{M}(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones meromorfas.

Sumación se series por el método de los residuos

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ se dice que es meromorfa en Ω si existe $A \subset \Omega$ tal que:

1. $A' \cap \Omega = \emptyset$.
2. $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus A)$.
3. f tiene un polo en cada $a \in A$.

Observaciones:

- En la definición anterior admitimos $A = \emptyset$, en cuyo caso, las funciones holomorfas son meromorfas.
- $\mathscr{M}(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones meromorfas.
- Toda función meromorfa es continua.

Sumación se series por el método de los residuos

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ se dice que es meromorfa en Ω si existe $A \subset \Omega$ tal que:

1. $A' \cap \Omega = \emptyset$.
2. $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus A)$.
3. f tiene un polo en cada $a \in A$.

Observaciones:

- En la definición anterior admitimos $A = \emptyset$, en cuyo caso, las funciones holomorfas son meromorfas.
- $\mathscr{M}(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones meromorfas.
- Toda función meromorfa es continua.
- $\mathscr{M}(\Omega)$ es un cuerpo si Ω es conexo.

Sumación se series por el método de los residuos

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ se dice que es meromorfa en Ω si existe $A \subset \Omega$ tal que:

1. $A' \cap \Omega = \emptyset$.
2. $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus A)$.
3. f tiene un polo en cada $a \in A$.

Observaciones:

- En la definición anterior admitimos $A = \emptyset$, en cuyo caso, las funciones holomorfas son meromorfas.
- $\mathscr{M}(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones meromorfas.
- Toda función meromorfa es continua.
- $\mathscr{M}(\Omega)$ es un cuerpo si Ω es conexo.
- El cociente de holomorfas con denominador no nulo es meromorfo.

Sumación se series por el método de los residuos

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ se dice que es meromorfa en Ω si existe $A \subset \Omega$ tal que:

1. $A' \cap \Omega = \emptyset$.
2. $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus A)$.
3. f tiene un polo en cada $a \in A$.

Observaciones:

- En la definición anterior admitimos $A = \emptyset$, en cuyo caso, las funciones holomorfas son meromorfas.
- $\mathscr{M}(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones meromorfas.
- Toda función meromorfa es continua.
- $\mathscr{M}(\Omega)$ es un cuerpo si Ω es conexo.
- El cociente de holomorfas con denominador no nulo es meromorfo.
- Si f es meromorfa entonces $P(f)$ y $Z(f)$ denota los polos y ceros de f.

Sumación se series por el método de los residuos

Teorema de los Residuos

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $S \subset \Omega$ un conjunto de puntos aislados de Ω y sea $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus S)$. Si Γ es un ciclo en $\Omega \setminus S$ regular a trozos y Ω-homólogo a 0 se verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a\in S} \operatorname{Ind}(\Gamma, a)\operatorname{Res}(f, a)$$

donde la suma contiene sólo una cantidad finita de sumandos no nulos.

Observaciones:

- El teorema se aplica a funciones meromorfas y a ciclos que no pasan por los polos de la función.

Sumación se series por el método de los residuos

Teorema de los Residuos

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $S \subset \Omega$ un conjunto de puntos aislados de Ω y sea $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus S)$. Si Γ es un ciclo en $\Omega \setminus S$ regular a trozos y Ω-homólogo a 0 se verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a\in S} \operatorname{Ind}(\Gamma, a)\operatorname{Res}(f, a)$$

donde la suma contiene sólo una cantidad finita de sumandos no nulos.

Observaciones:

- El teorema se aplica a funciones meromorfas y a ciclos que no pasan por los polos de la función.
- Si f tiene una singularidad evitable en a entonces $\operatorname{Res}(f, a) = 0$.

Sumación se series por el método de los residuos

Teorema de los Residuos

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $S \subset \Omega$ un conjunto de puntos aislados de Ω y sea $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus S)$. Si Γ es un ciclo en $\Omega \setminus S$ regular a trozos y Ω-homólogo a 0 se verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a \in S} \operatorname{Ind}(\Gamma, a)\operatorname{Res}(f, a)$$

donde la suma contiene sólo una cantidad finita de sumandos no nulos.

Observaciones:

- El teorema se aplica a funciones meromorfas y a ciclos que no pasan por los polos de la función.
- Si f tiene una singularidad evitable en a entonces $\operatorname{Res}(f, a) = 0$.
- Si f tiene un polo de orden m en a entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}$$

Sumación se series por el método de los residuos

Teorema de los Residuos

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $S \subset \Omega$ un conjunto de puntos aislados de Ω y sea $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus S)$. Si Γ es un ciclo en $\Omega \setminus S$ regular a trozos y Ω-homólogo a 0 se verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a\in S} \operatorname{Ind}(\Gamma,a)\operatorname{Res}(f,a)$$

donde la suma contiene sólo una cantidad finita de sumandos no nulos.

Observaciones:

- El teorema se aplica a funciones meromorfas y a ciclos que no pasan por los polos de la función.
- Si f tiene una singularidad evitable en a entonces $\operatorname{Res}(f,a) = 0$.
- Si f tiene un polo de orden m en a entonces

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}$$

- El teorema de los residuos se aplica al cálculo de integrales.

Sumación se series por el método de los residuos

Definición

Llamaremos *función sumadora* a una función meromorfa $\alpha \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos $P(\alpha) = \mathbb{Z}$, todos simples, que permanece acotada sobre $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{z : |z| = R_n\}$, donde R_n es una sucesión que verifica $n < R_n < n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio

Comprobar que las siguientes funciones son funciones sumadoras.

- $\alpha(z) = \pi \cot \pi z$.

Sumación se series por el método de los residuos

Definición

Llamaremos *función sumadora* a una función meromorfa $\alpha \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos $P(\alpha) = \mathbb{Z}$, todos simples, que permanece acotada sobre $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{z : |z| = R_n\}$, donde R_n es una sucesión que verifica $n < R_n < n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio

Comprobar que las siguientes funciones son funciones sumadoras.

- $\alpha(z) = \pi \cot \pi z$.
- $\alpha(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.

Sumación se series por el método de los residuos

Proposición

Sea $\alpha \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ una función sumadora y $\alpha_k = \mathrm{Res}(\alpha, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Si $f = P/Q$ es una fracción racional que no tiene polos en $\mathbb{Z}$, y se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \alpha(z) f(z) dz = 0$$

donde $C_n(\theta) = R_n e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces se verifica que implica

$$\lim_n \sum_{|k|\leq n} \alpha_k f(k) = - \sum_{a \in P(f)} \mathrm{Res}(\alpha f, a).$$

Sumación se series por el método de los residuos

Proposición

Sea $\alpha \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ una función sumadora y $\alpha_k = \mathrm{Res}(\alpha, k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Si $f = P/Q$ es una fracción racional que no tiene polos en $\mathbb{Z}$, y se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \alpha(z) f(z) dz = 0 \qquad \text{(A)}$$

donde $C_n(\theta) = R_n e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces se verifica que implica

$$\lim_n \sum_{|k|\le n} \alpha_k f(k) = -\sum_{a\in P(f)} \mathrm{Res}(\alpha f, a).$$

Proposición

Sea $\alpha \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ una función sumadora y $\alpha_k = \mathrm{Res}(\alpha, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Si P, Q son polinomios y $f = P/Q$ no tiene polos en $\mathbb{Z}$ y $\mathrm{grado}(Q) - \mathrm{grado}(P) \ge 2$ entonces se verifica la condición (A) y consecuentemente

$$\lim_n \sum_{|k|\le n} \alpha_k f(k) = -\sum_{a\in P(f)} \mathrm{Res}(\alpha f, a).$$

Si $\{\mathrm{Res}(\alpha, k)\}$ está acotada entonces la serie anterior es abs. convergente.

Sumación se series por el método de los residuos

Proposición

Sea $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ una función sumadora y $\alpha_k = \text{Res}(\alpha, k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Si $f = P/Q$ es una fracción racional que no tiene polos en $\mathbb{Z}$, y se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \alpha(z) f(z) dz = 0 \tag{A}$$

donde $C_n(\theta) = R_n e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces se verifica que implica

$$\lim_n \sum_{|k|\leq n} \alpha_k f(k) = -\sum_{a\in P(f)} \text{Res}(\alpha f, a).$$

Proposición

Sea $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ una función sumadora y $\alpha_k = \text{Res}(\alpha, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Si P, Q son polinomios y $f = P/Q$ no tiene polos en $\mathbb{Z}$, α es impar y $\text{grado}(Q) - \text{grado}(P) \geq 1$ entonces se verifica la condición (A) y consecuentemente

$$\lim_n \sum_{|k|\leq n} \alpha_k f(k) = -\sum_{a\in P(f)} \text{Res}(\alpha f, a).$$

Sumación se series por el método de los residuos

Ejercicio

Obtener las siguientes sumas:

- $\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{(z^2 - n^2)}$.
- $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$.

Teorema de Mittag Leffler

Definición

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones meromorfas $f_n \in \mathscr{M}(\Omega)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que converge uniformemente sobre compactos cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ que verifica

i) $P(f_n) \cap K = \emptyset$ para cada $n > m$.

ii) La serie $\sum_{n>m} f_n$ converge uniformemente sobre K.

Observaciones:

Teorema de Mittag Leffler

Definición

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones meromorfas $f_n \in \mathscr{M}(\Omega)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que converge uniformemente sobre compactos cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ que verifica

i) $P(f_n) \cap K = \emptyset$ para cada $n > m$.

ii) La serie $\sum_{n>m} f_n$ converge uniformemente sobre K.

Observaciones:

- $M = \cup_n P(f_n)$ es discreto.

Teorema de Mittag Leffler

Definición

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones meromorfas $f_n \in \mathscr{M}(\Omega)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que converge uniformemente sobre compactos cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ que verifica

i) $P(f_n) \cap K = \emptyset$ para cada $n > m$.

ii) La serie $\sum_{n>m} f_n$ converge uniformemente sobre K.

Observaciones:

- $M = \cup_n P(f_n)$ es discreto.
- En el abierto $\Omega \setminus M$ la serie converge uniformemente sobre compactos. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ define una función meromorfa.

Teorema de Mittag Leffler

Definición

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones meromorfas $f_n \in \mathscr{M}(\Omega)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que converge uniformemente sobre compactos cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ que verifica

i) $P(f_n) \cap K = \emptyset$ para cada $n > m$.

ii) La serie $\sum_{n>m} f_n$ converge uniformemente sobre K.

Observaciones:

- $M = \cup_n P(f_n)$ es discreto.
- En el abierto $\Omega \setminus M$ la serie converge uniformemente sobre compactos. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ define una función meromorfa.
- La noción introducida implica la convergencia de la serie en $(C(\Omega, \mathbb{C}_\infty), \tau_k)$.

Teorema de Mittag Leffler

Teormea de Mittag Leffler

Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto sin puntos de acumulación en $\mathbb{C}$. Para cada $a \in M$ sea P_a un polinomio no nulo con $P_a(0) = 0$. Entonces, existe $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con $P(f) = M$ de forma que $P_a(\frac{1}{z-a})$ es la parte singular de f en cada $a \in M$. Más concretamente:

(i) Si M es finito, podemos tomar $f(z) = \sum_{a \in M} P_a(\frac{1}{z-a})$.

(ii) Si M es infinito, lo escribimos como sucesión $M = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de forma que

$$|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \cdots |z_n| \leq \cdots \text{ y } \lim_n |z_n| = +\infty$$

Entonces existe una sucesión de polinomios Q_n tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[P_{z_n}\left(\frac{1}{z - z_n}\right) - Q_n(z) \right]$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con las propiedades requeridas.

Teorema de Mittag Leffler

Corolario

Sea $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con infinitos polos $P(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ que se suponen ordenados según módulos crecientes

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \cdots$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea P_n un polinomio con $P_n(0) = 0$ tal que $P_n(1/(z - a_n))$ es la parte principal de f en a_n. Entonces existe una función entera $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y una sucesión de polinomios Q_n tales que f admite un desarrollo de la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z) \right]$$

uniformemente convergente sobre compactos.

Teorema de Mittag Leffler

Ejercicio

- Encontrar las funciones meromorfas más generales que tienen polos simples en $M = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ con residuo 1 en cada uno de ellos sabiendo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_n \frac{1}{|z_n|^k} = +\infty \text{ y } \sum_n \frac{1}{|z_n|^{k+1}} < +\infty.$$

- Establecer que

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2},$$

razonando la convergencia en uniforme sobre compactos de la serie.

- Establecer que

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2},$$

razonando la convergencia en uniforme sobre compactos de la serie.